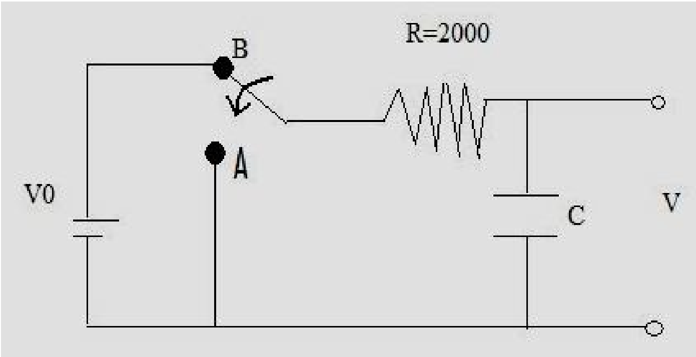
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2008-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **04/08/2008**
DACIBAHCC

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN FINAL
DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

Un condensador eléctrico posee una capacidad desconocida. Para calcular su capacidad se conecta a un circuito como el que se muestra en la figura adjunta. En este circuito, el conmutador se conecta primero a B, de forma que el condensador se descarga a través de la resistencia. Cuando el condensador se está descargando, el valor del voltaje que circula a través de él se mide durante 5 segundos, en intervalos de un segundo. Los valores medidos se muestran en la siguiente tabla:



t(seg)	1	2	3	4	5
V(t)	9.4	7.31	5.15	3.55	2.81

a) Realice un ajuste por mínimos cuadrados para calcular el voltaje inicial y la capacidad del condensador si el voltaje del condensador está en función del tiempo:
$V = V_0 e^{-t/RC}$
Donde V_0 es el voltaje inicial, R es el valor de la resistencia y C la capacidad del condensador. Indique a su criterio que tan buena es la función de ajuste obtenida?

b) Aproxime V(3.5) haciendo uso de los cuatro primeros puntos de la tabla anterior mediante un polinomio interpolante de Newton basado en diferencias finitas. Hallar el error cometido.

Solución

a)
ln(V)=-t/(RC) + ln(V0)

ajustar a la curva y=mx+b
donde
C=-t/(Rm) y V0=e^b
» p=polyfit(t,log(v),1)

p =

   -0.3137   2.5750

» c=-1/(R*p(1))

c =

0.0016

» v0=exp(p(2))

v0 =

13.1316

b)

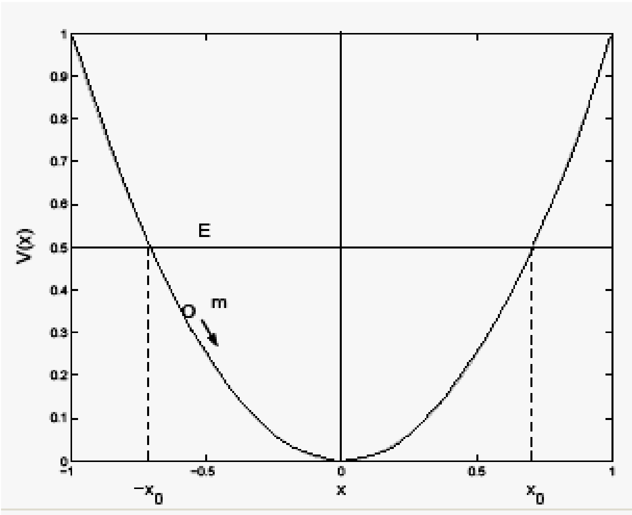
V(3.5)= 4.2406

Problema 2

Una partícula con energía total E y masa m se mueve a lo largo del eje "x" con energía potencial V(x). Para simplificar considere: $V(x) = \alpha\ x^n$ donde $\alpha>0$ y n=2, 4,... La ecuación de movimiento de la partícula es dada fácilmente con la ayuda de la energía total: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = const$, integrándola

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Esto proporciona la siguiente expresión para el período de las oscilaciones T, de las partículas con energía potencial $V(x)$:



$$T = 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$ con

$$x_0 = \left(\frac{E}{\alpha}\right)^{1/n}$$

Para un caso práctico usar n=2, α=1, y $\omega_0=\pi$

a) Estime el periodo usando una cuadratura de Gauss-Legendre con 05 puntos.

b) Use 03 figuras abiertas de Simpson (Simpson abierto).

c) Compare sus resultados con la solución analítica.

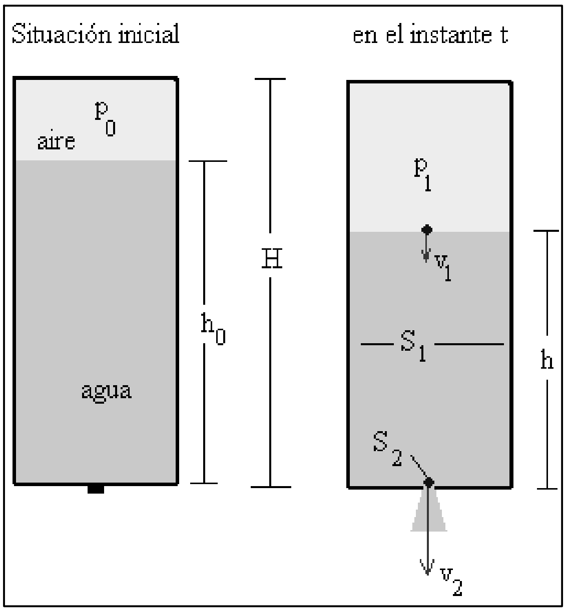
Nota: Integral exacta: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y $\alpha = \frac{1}{2}m\omega_0^{\ 2}$

Solución

solución:
Gauss-Legendre
I= 0.46438254286941
T≈ 1.85753017147762 7.15%
Simpson abierto
S=4*h/3*[0fo+2f1-f2+2f3+0f4+2f5-f6+2f7+0f8+2f9-f10+2f11+0f12]
h=(x0-0)/12= 0.05892556509888
S= 0.45218056924021
T≈4*S= 1.80872227696085 9.6%
Solución Analítica
T=2

Problema 3

El sistema de vaciado de un tanque cilíndrico mostrado se modela usando las ecuaciones de continuidad, Bernoulli y expansión isotérmica. Considere los siguientes valores:



- radio del depósito r_1=10 cm
- radio del orificio r_2=0.8 cm
- altura del depósito H=0.5 m
- altura inicial de agua en el depósito es h_0=40 cm
- presión inicial de aire en el depósito es p_0=405300.108 Pa
- gravedad g=9.81 m/s^2
- presión atmosférica p_{at}=101293 Pa
- S_1 área circular del cilindro
- S_2 área circular del orificio
- densidad del agua ρ =1000 kg/m^3

El modelo matemático que los relaciona usando las unidades del sistema internacional es:

$$\sqrt{\frac{H-h}{-\rho g h^2+(\rho g H+p_{at})h+H(p_o-p_{at})-p_o h_o}}\,dh=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2}-1\right)}}\,dt\,,$$

Usando el método de Euler progresivo estime la altura h en cm, en la primera iteración con un paso de 1 segundo y luego una segunda iteración con un paso de 1.5 segundos.

Solución

Pasando a SI lo necesario y reemplazando en la ecuación diferencial

r1 := 1(ho := 0.4(ro := 100(g := 9.81

r2 := 0.8 po := 405300.10

$$s1 := \pi \cdot r1^2$$

$H := 0.5($ $\qquad$ $pat := 10129($ $\qquad$ $s2 := \pi \cdot r2^2$

$$f(h) := -\sqrt{\frac{-ro \cdot g \cdot h^2 + (ro \cdot g \cdot H + pat) \cdot h + H \cdot (po - pat) - po \cdot ho}{\frac{1}{2} \cdot ro \cdot \left(\frac{s1^2}{s2^2} - 1\right)(H - h)}}$$

paso	iteraciones	h en cm
$dt := 1$	$h1 := ho + dt \cdot f(ho)$	$h1 \cdot 100 = 24.117069$
$dt := 1.5$	$h2 := h1 + dt \cdot f(h1)$	$h2 \cdot 100 = 13.807458$

Problema 4

La ecuación diferencial: $t\ y'' + (1 - n - t)\ y' + n\ y = t - 1$ con la condición $y(0) = 0$ tiene una solución de la forma: $y = \dfrac{t}{n-1} + C\ t^{\,n}, \quad n > 1.$

a) Resuelva el problema de valor frontera con la condición adicional $y'(1) = 1$, si $n = 3$, aproxime $y(1/3)$, $y(2/3)$ e $y(1)$, usando el método de las diferencias finitas con $h = 1/3$.

b) Obtener los errores correspondientes y comente sus resultados.

Solución

a) Discretizando:

$t_0 = 0$	$t_1 = 1/3$	$t_2 = 2/3$	$t_3 = 1$	$t_4 = 4/3$
$y_0 = 0$	y_1	y_2	y_3	y_4

$y_3' = 1$

$h = 1/3$

Donde:

$t_i y_i'' + (2 - t_i) y_i' + 3y_i = t_i - 1$

Aplicando para i = 1, 2 y 3:

$$t_1\left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}\right) + (-2 - t_1)\left(\frac{y_2 - y_0}{2h}\right) + 3y_1 = t_1 - 1$$

$$t_2\left(\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2}\right) + (-2 - t_2)\left(\frac{y_3 - y_1}{2h}\right) + 3y_2 = t_2 - 1$$

$$t_3\left(\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2}\right) + (-2 - t_3)\left(\frac{y_4 - y_2}{2h}\right) + 3y_3 = t_3 - 1$$

$$y_3' = 1 = \frac{y_4 - y_2}{2h}$$

Resolviendo el sistema lineal de ecuaciones:

$y_1 = 0.1785$

$y_2 = 0.2623$

$y_3 = 0.5148$

b)

De los datos hallamos la solución exacta: $\bar{y}(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^3}{6}$

$y_1 = 0.1728 \quad \varepsilon_1 = 0.0057$

$y_2 = 0.3827 \quad \varepsilon_2 = 0.1204$

$y_3 = 0.6667 \quad \varepsilon_3 = 0.1519$

Los errores son grandes debido a que el h no es el adecuado.

Los Profesores